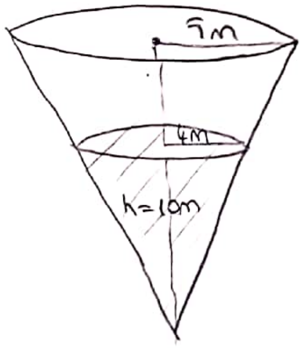
Bağıl Değişim Oranları

Değişim oranı bilinen bir veya birkaç değişkene bağlı bir değişkenin değişim oranının bulunmasına bağıl oran problemi denir.

• Bağıl oran Probleminin Çözümünde İzlenecek Yol

1) Sabit ve değişkenler şekille belirtilir.
2) Verilen ve İstenenler t zaman parametresi ile yazılır.
3) Elde edilen denklem ve eşitsizlikler tek parametreye düştükten sonra türev alınır.

Örnek: Taban yarıçapı 5 m yüksekliği 10 m olan koni şeklindeki deponun tepesi aşağı bakmaktadır. Boş olan bu depoya 9 m^3/dk hızla su dolduruluyor. $r=4$ m olduğunda suyun yükseliş hızı nedir?



Yarıçap $0 \leq r(t) \leq 5$

Yükseklik $0 \leq h(t) \leq 10$

$\frac{dV}{dt} = 9\ m^3/dk$ $\quad \frac{dr}{dt} \rightarrow$ yarıçap değişim hızı

$\frac{dh}{dt}$ yükseliş hızı

$V(t) = \frac{1}{3}\pi r^2(t) h(t)$ denklemini tek parametreye düşürmeliyiz.

Şekilden

$$\frac{r(t)}{5} = \frac{h(t)}{10} \Rightarrow r(t) = \frac{h(t)}{2} \text{ yazılır.}$$

$$V(t) = \frac{\pi}{3} \frac{h^2(t)}{4} \cdot h(t) = \frac{\pi}{12} h^3(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2(t) \frac{dh}{dt} \qquad r=4 \text{ için } h=8 \text{ m}$$

$$9 = \frac{\pi}{4} \cdot 64 \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = 0{,}1 \text{ m/dk.}$$

Örnek: Küresel bir balona $20 \, m^3/dk$ oranıyla hava pompalanıyor. Yarıçap 3 m iken yarıçapın değişim oranı nedir?

Havanın $20 m^3/dk$ oranıyla pompalanıyor olması

$$\frac{dV}{dt} = 20 \, m^3/dk \text{ dır.}$$

Yarıçap 3 m iken yarıçapın değişim oranının istenmesi

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3} = ?$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\pi r^2}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3} = \frac{20}{4\pi \cdot 9} = \frac{5}{9\pi} \text{ m/dk.}$$

Örnek: Bir küpün başlangıçta bir kenarının uzunluğu $x=32$ m dir. Kenarın uzunluğu 3 m/dk hızla küçülürse $x=5$m iken küpün yüzey alanının ve hacminin değişimini bulunuz.

$$\frac{dx}{dt} = -3\,m/dk \qquad \text{istenen } \left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=5} = ? \quad \left.\frac{dV}{dt}\right|_{x=5} = ?$$

$$S = 6x^2 \quad \frac{ds}{dt} = 12\,x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = 12 \cdot 5 \cdot (-3) = -180\, m^2/dk$$

Yüzey alanı dk.da $180m^2$ azalmaktadır.

$$V = x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \left.\frac{dV}{dt}\right|_{x=5} = 3 \cdot 5^2 \cdot (-3) = -225\, m^3/dk$$

Hacim dk.da $225\, m^3$ azalmaktadır.

Örnek: Bir dikdörtgenin w eni 2cm/sn hızla artarken l boyu 2cm/sn hızla azalmaktadır.

$l=12$ cm ve $w=5$ cm olduğunda, dikdörtgenin alanının, çevresinin, köşegen uzunluğunun değişim hızlarını bulunuz.

$$\frac{dw}{dt} = 2\,cm/sn \qquad \frac{dl}{dt} = -2\,cm/sn$$

$$A = w \cdot l \Rightarrow \frac{dA}{dt} = w \cdot \frac{dl}{dt} + \frac{dw}{dt} l$$

$$\frac{dA}{dt} = 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 12 = 14\, cm^2/sn$$ alanı artar.

$Ç=2(w+l) \Rightarrow \frac{dÇ}{dt}=2\left(\frac{dw}{dt}+\frac{dl}{dt}\right)=2(2-2)=0=sbt$

Çevresi sabit kalır.

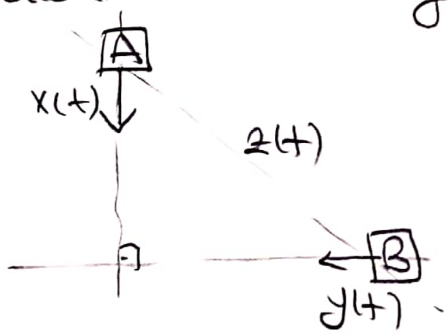
$L=\sqrt{w^2+l^2} \Rightarrow \frac{dL}{dt}=\frac{1}{2}(w^2+l^2)^{-1/2}\cdot\left(2w\frac{dl}{dt}+2l\frac{dw}{dt}\right)$

$\frac{dL}{dt}=\frac{1}{2}(5^2+12^2)^{1/2}(2.5.2+2.12.(-2))$

$=-\frac{14}{13}$ cm/sn

köşegen uzunluğu azalır.

Örnek! Dik bir kavşakta A ve B araçları karşılaşıyor. A 40 km/sa ve B ise 60 km/sa hızla hareket etmektedir. A 5 km ve B=12 km yol gittiklerinde araçlarındaki uzaklığın değişim hızı nedir?



$\frac{dx}{dt}=40$ km/sa

$\frac{dy}{dt}=60$ km/sa

$\frac{dz}{dt}=?$

$x^2(t)+y^2(t)=z^2(t)$

$2x(t)\frac{dx}{dt}+2y(t)\frac{dy}{dt}=2z(t)\frac{dz}{dt}$

$2.5.40+2.12.60=2.13.\frac{dz}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt}\cong 70$ km/sa

Örnek! Çapı 12 cm olan bir kürenin hacmindeki değişim hızı $9 \, cm^3/sn$ dir. Bu kürenin alanındaki değişim hızı nedir?

$$r = 6 \, cm \quad , \quad \frac{dV}{dt} = 9 \, cm^3/sn \qquad \frac{dA}{dt} = ?$$

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{4}{\cancel{3}}\pi . \cancel{3} r^2(t) \frac{dr}{dt} \quad , r = 6$$

$$9 = 4\pi . 36 . \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{16\pi} \, cm/sn$$

$$A = 4\pi r^2 \quad \frac{dA}{dt} = 4\pi . 2 . r(t) \frac{dr}{dt} = 8\pi . 6 . \frac{1}{16\pi} = 3 \, cm^2/sn$$

Lineerleştirme ve Diferansiyeller

Türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki teğet doğrusu, $(a, f(a))$ noktasından geçer, bu doğrunun denklemi

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

şeklindedir. Bu doğruyu

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

şeklinde gösterelim.

Tanım! $y = f(x)$, bir a noktasında türevlenebilen bir fonksiyon ise

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun a noktasındaki lineerleştirmesi denir. $x \to a$ için $f(x) \approx L(x)$ yaklaşımındaki f ye a noktasındaki standart lineer yaklaşım denir. $x=a$ noktasına da bu yaklaşımın merkezi denir.

Örnek: $f(x)=\sqrt{1+x}$ fonksiyonunun $a=0$ noktasındaki lineerleştirmesini bulunuz

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f(0)=1 \quad f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$L(x)=f(0)+f'(0)(x-0)$$

$$L(x)=1+\frac{1}{2}(x-0)=1+\frac{x}{2}$$

Örnek: $f(x)=\sqrt{x+1}$ fonksiyonunun $a=3$ noktasındaki lineerleştirmesini bulunuz standart lineer yaklaşımı kullanarak $\sqrt{3{,}95}$ ve $\sqrt{4{,}01}$ in yaklaşık değerini bulunuz

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \quad f'(3)=\frac{1}{4}, \quad f(3)=2$$

ise f fonksiyonunun $a=3$ noktasındaki lineerleştirmesi

$$L(x)=f(3)+f'(3)(x-3)$$
$$L(x)=2+\frac{1}{4}(x-3)$$

$x \to 3$ için $f(x)\approx L(x)$ yada $\sqrt{x+1}\approx 2+\frac{1}{4}(x-3)$

$x=2{,}95$, $f(2{,}95)=\sqrt{3{,}95}\approx L(2{,}95)=2+\frac{1}{4}(2{,}95-3)=1{,}9875$

$x=3{,}01$, $f(3{,}01)=\sqrt{4{,}01}\approx L(3{,}01)=2+\frac{1}{4}(3{,}01-3)=2{,}0025$